

LMS 算法的二次稳定性及鲁棒 LMS 算法

杨 然,许晓鸣,张卫东

(上海交通大学自动化系,上海 200030)

摘 要: 本文在时域内研究 LMS 算法 (least mean square algorithm) 的稳定性及鲁棒 LMS 算法的构造. 首先将 LMS 算法表达式转化为标准的离散时间系统状态方程形式,之后运用线性矩阵不等式 (LMI) 技术对其二次稳定性进行了分析. 针对滤波过程中会出现的输入和测量噪声干扰,本文提出了一种兼顾收敛性、鲁棒稳定性以及鲁棒性能的鲁棒 LMS 算法,最后给出了仿真算例,通过和一般的 LMS 算法的比较,体现了这种鲁棒 LMS 算法的优越性.

关键词: LMS 算法; 二次稳定性; 鲁棒滤波

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0124-03

The Quadratic Stability Property of LMS Algorithm and Robust LMS Algorithm

YANG Ran, XU Xiao-ming, ZHANG Wei-dong

(Dept. of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The stability property of LMS algorithm (least mean square algorithm) and the design of robust LMS algorithm are discussed in this paper. The standard LMS algorithm is transferred into a standard state equation form of discrete-time system. Then its quadratic stability property is analyzed by linear matrix inequality technique. Owing to the noise often emerging in input and measure of filter, a robust LMS algorithm, in which convergence, robust stability and robust property are all considered, is developed. In the end, simulation results are presented to support the analysis and to compare the performance of the robust algorithm with the usual LMS algorithm. They show that the algorithm is feasible.

Key words: LMS algorithm; quadratic stability; robust filtering

1 引言

作为一种梯度自适应滤波方法, LMS 算法因简单有效而得到广泛的应用. 但是在信噪比较低的环境下, LMS 算法的效果较差. 针对噪声扰动人们开始考虑鲁棒滤波, 各种相应的算法也涌现出来. 一般可以将它们分为两类方法, 一类是频域法, 即将 LMS 算法转化为传递函数的形式, 针对该传递函数中的不确定性项设计鲁棒 LMS 算法^[1]. 这类方法往往对于输入变量的结构具有特定的要求, 而且对于非线性问题的讨论有较大的困难; 另一类方法是时域法, 为了改善系统的鲁棒性能, 通常可以通过对迭代格式中的估计误差进行处理或者通过调整迭代步长来实现. 前者包括带滤波器的 LMS 算法^[2], 以及运用模糊控制的思想的比例符号算法^[3]等. 这些对估计误差进行处理的算法虽然有效但是其结果不唯一无法达到最优性能. 调整步长的方法也是一种被人们广为采用的方法, 步长的选择反映了在失调和快速收敛性之间的折衷. 文[4]提出通过估计误差的方差来控制步长的方法; 文[5]中提出用梯度下降法来改变步长以减小二次估计误差, 但是以上算法对噪声的扰动十分敏感. 本文提出了一种对于 L_2 空间的一切噪声扰动都能满足误差要求且能实现最快收敛速度的鲁棒 LMS 算法, 该方法简单易于实现.

在本文中上标符号“ $'$ ”表示矩阵的转置, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大奇异值, $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值.

2 二次稳定性讨论

既然在时域内讨论标准的 LMS 算法, 不妨将其转化为离散时间系统状态方程形式, 从而可以直接运用现有的系统理论知识来研究它. 一般 LMS 算法的格式为

$$w(n) = w(n-1) + \mu u(n) e(n) \quad (1)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - w(n-1)u(n) \quad (2)$$

其中 $w(n)$ 是权, $u(n)$ 是输入变量, μ 是迭代步长, $e(n)$ 是估计误差, $y(n)$ 是滤波器输出, $d(n)$ 是参考输出. 为了研究系统的输入过程和测量过程都具有噪声干扰的情况, 不妨令

$A(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ d(n) \end{bmatrix}$, 从而 $u(n)$ 和 $d(n)$ 可以用 $A(n)$ 表示.

$$u(n) = K \cdot A(n) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \dots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} A(n) \quad (3)$$

$$d(n) = G \cdot A(n) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] A(n) \quad (4)$$

令 $w(n)$ 为状态变量 $x(n)$, 可得如下离散时间系统

$$x(n) = [I - \mu K A(n)] x(n-1) + \mu K A(n) G A(n) \quad (5)$$

不妨令 $\tilde{A}(n) = (I - \mu KA(n)A(n)K)$, $\tilde{B}(n) = \mu KA(n)GA(n)$, 式(5)可表示为

$$x(n) = \tilde{A}(n)x(n-1) + \tilde{B}(n) \quad (6)$$

定理 1 对于一般的 LMS 算法,若存在对称正定矩阵 P , 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}P\tilde{A} - P & \tilde{A}P \\ P\tilde{A} & P \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

则该 LMS 算法二次稳定.

证明 根据系统二次稳定的条件可知,若系统二次稳定需满足

$$[x(n-1)\tilde{A}(n) + \tilde{B}(n)]P[\tilde{A}(n)x(n-1) + \tilde{B}(n)] - x(n-1)Px(n-1) < 0 \quad (8)$$

令 $z(n) = \begin{bmatrix} x(n-1) \\ \tilde{B}(n) \end{bmatrix}$, 则式(8)可表示为

$$z(n) \begin{bmatrix} \tilde{A}(n)P\tilde{A}(n) & \tilde{A}(n)P \\ P\tilde{A}(n) & P \end{bmatrix} z(n) < 0$$

所以式(7)可得.

证毕.

这个定理提供了 LMS 算法二次稳定的充分条件,对于存在噪声干扰的情况,即 $A + \Delta A \rightarrow A$ 时,也可以代入式(7),进行判别.

3 鲁棒 LMS 算法

当系统受到噪声干扰时,用一般的 LMS 算法将很难得到令人满意的结果.为此本文分别讨论系统的测量过程受到噪声干扰的情况,以及系统的输入过程和测量过程同时受到噪声干扰的情况.

设 $v(n)$ 是测量过程中受到的噪声干扰, \bar{w} 是精确的(最优的)权系数,则有

$$d(n) = u(n)\bar{w} + v(n) \quad (9)$$

定义权系数的估计误差为: $\tilde{w}(n) = \bar{w} - w(n)$, 由式(1)、(2)、(9)可以推导出

$$\begin{aligned} \tilde{w}(n) &= [I - \mu u(n)u(n)]\tilde{w}(n-1) + \mu u(n)v(n) \\ \tilde{w}(n) - \mu u(n)u(n)\tilde{w}(n-1) &= \mu u(n)v(n) \end{aligned} \quad (10)$$

令 $s(n) = \begin{bmatrix} \tilde{w}(n-1) \\ v(n) \end{bmatrix}$, 定义权系数估计误差和测量过程的传递算子

$$T_n : s(n) \rightarrow \tilde{w}(n), \text{ 其中 } T_n = [T_{n,1} \ T_{n,2}] \quad (11)$$

若无 $v(n)$, 则是标准的 LMS 问题. 现在同时考虑如式(10)所描述的算法的收敛性和鲁棒性问题. 显然若满足收敛性则要求 $T_{n,1} < 1$; 若满足鲁棒稳定性则要求 $T_{n,2} < 1$. 因此要同时满足收敛性和稳定性就要求满足 $T_n < 1$. 但是鲁棒性的讨论不能仅限于鲁棒稳定性,还应该讨论鲁棒性能,即考虑 $T_{n,2} < \beta < 1$. 令 $R_n = u(n)u(n)$, 显然 R_n 是对称半正定矩阵,不妨设 R_n 的最小特征值为 $\mu_{n,s}$, 最大特征值为 $\mu_{n,b}$.

定理 2 为了保证在测量过程受到扰动后 LMS 算法能够在达到鲁棒性能的要求时具有最快的收敛性,应当调整步长 $\mu(n)$ 以实现

$$\mu(n) = \min \left\{ \frac{2}{\mu_{n,b}}, \frac{\max_i |1 - \mu(n)|}{\sqrt{\mu_{n,b}}} \right\} \quad (12)$$

证明 欲满足 $T_{n,2} < \beta < 1$, 即要求 $|\mu^2(n)R_n| < \beta < 1$, 由此 $0 < \mu(n) < \sqrt{\beta/\mu_{n,b}}$. 由收敛性条件 $T_{n,1} < 1$, 则 $0 < \mu(n) < 2/\mu_{n,b}$. 要同时满足鲁棒稳定性和收敛性,则 $0 < \mu(n) < \mu_n$, 因为在达到鲁棒性能的要求的同时具有最快的收敛性,于是得到式(12). **证毕.**

现在考虑同时存在输入干扰和测量干扰的情况. 输入干扰表示为 $\bar{u}(n) = u(n) + \bar{u}(n)$, 即 $\bar{R}_n = R_n + \bar{R}_n$. 式(10)表示为

$$\begin{aligned} \tilde{w}(n) &= [I - \mu(n)(R_n + \bar{R}_n)]\tilde{w}(n-1) \\ &\quad - \mu(n)\bar{u}(n)v(n) \end{aligned} \quad (13)$$

考虑到 $\mu(n)\bar{u}(n)v(n)$ 中的 $v(n)$ 本身就是噪声,因此式(13)可近似地表示为

$$\begin{aligned} \tilde{w}(n) &= [I - \mu(n)(R_n + \bar{R}_n)]\tilde{w}(n-1) \\ &\quad - \mu(n)u(n)v(n) \end{aligned} \quad (14)$$

现讨论 \bar{R}_n 对 $\tilde{w}(n)$ 的影响,若要求满足鲁棒稳定性,从能量角度考虑可知

$$\sup_{\bar{R}_n} \frac{\|\tilde{w}(n)\|_2^2}{\|\bar{R}_n\|_2^2} = \frac{\mu(n)\|\tilde{w}(n-1)\|_2^2}{\|\bar{R}_n\|_2^2} < \beta < 1 \quad (15)$$

定理 3 对于能量有界的输入干扰信号,不妨设 $\|\bar{R}_n\|_2 < \beta$, 为了保证在同时受到输入和测量扰动的最坏情况下, LMS 算法能够在达到鲁棒性能的要求时具有最快的收敛性,应当调整步长 $\mu(n)$ 以实现

$$\mu(n) = \min \left\{ \frac{\min_{i \in [0, \mu(n)]} \max_j |1 - \mu(n)|}{\|\tilde{w}(n-1)\|_2}, \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right\} \quad (16)$$

证明 可参照定理 2.

4 仿真研究

例 1 参数估计问题. 一阶 AR 过程 $u(n)$ 由如下差分方程描述

$$u(n) = au(n-1) + v(n)$$

其中 a 是过程参数, $v(n)$ 是零均值白噪声,方差是 σ^2 . 为了估计参数 a , 运用一般的一阶 LMS 自适应估计算法和本文提出的鲁棒 LMS 估计算法,若 $\sigma = 1.93627$, 待辨识参数 $a = 0.99$, 结果如图 1 所示(注:以下图中 k 表示步长).

效果较好且有代表性的两个步长下的 LMS 算法所得的结果和鲁棒 LMS 算法的结果同时反映在图 1 中. 从图中可以看出当步长为 0.001 时 LMS 算法的鲁棒性较好但收敛性很慢,当步长为 0.01 时 LMS 算法的收敛性较快但鲁棒性差,相比之下鲁棒 LMS 算法不仅收敛快且鲁棒性好.

例 2 线性系统辨识问题. 已知系统脉冲响应是 $W_{opt} = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2]$, 自适应滤波器的输入可看作是如下自回归过程的输出

$$\begin{aligned} x(n) &= 1.79x(n-1) - 1.945x(n-2) + 1.27x(n-3) \\ &\quad - 0.5x(n-4) + 0.4v(n) \end{aligned}$$

其中 $v(n)$ 具有单位方差的零均值白噪声信号,且滤波器的

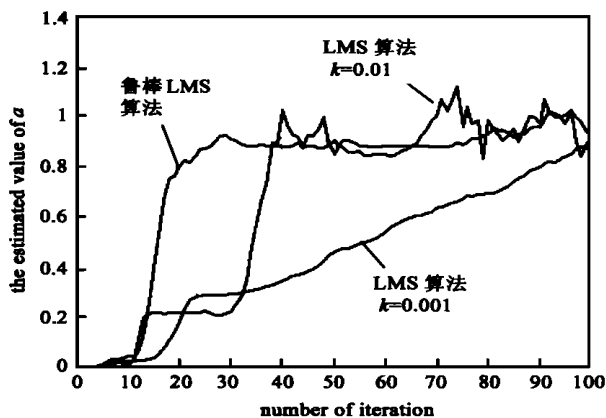


图1 参数 a 的估计过程

测量过程受到 CG(contaminated-Gaussian) 信号干扰. CG 信号的
概率密度函数为

$$p = (1 - \alpha) N(0, \sigma_1^2) + \alpha N(0, \sigma_2^2)$$

其中: α 是干扰因子, 估计的系统响应为 $w(n)$, 估计误差为 $\tilde{w}(n)$, 估计误差的能量为 $c = \tilde{w}(n)^2$.

分别用一般的 LMS 算法和本文提出的鲁棒 LMS 算法去
辨识, 得到的结果如图 2 所示.

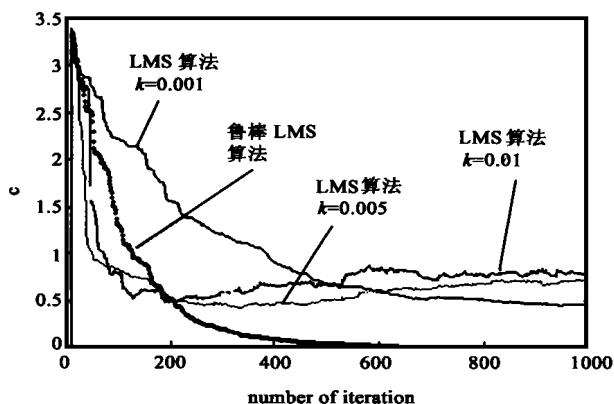


图2 估计误差能量. ($\alpha=0.1$, $\sigma_1^2=0.1024$, $\sigma_2^2=100$)

上述两个辨识例子可以发现即使在信噪比很小的情况
下, 鲁棒 LMS 算法能保持很好的鲁棒性能且同时具有快速的
收敛性, 与一般的 LMS 算法相比显示了明显的优越性.

参考文献:

- [1] C. P. Kwong. Robust design of the LMS algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(10): 2613 - 2616.
- [2] Markus Rupp, Ali H. Sayed. A time-domain feedback analysis of filtered-error adaptive gradient algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(6): 1428 - 1439.
- [3] Seung Chan Bang and Souguil Ann. A robust algorithm for adaptive FIR filtering and its performance analysis with additive Contaminated-Gaussian noise [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems- I: Fundamental Theory and Applications, 1996, 43(5): 361 - 369.
- [4] R. H. Kwong and E. W. Johnson. A variable step size LMS algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(7): 1633 - 1642.
- [5] V. J. Mathews and Z. Xie. A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41: 2075 - 2087.

作者简介:



杨 然 1975 年出生, 现在上海交通大学自动化系攻读博士学位. 主要研究领域为鲁棒滤波与辨识、数字信号处理、小波分析.



许晓鸣 1957 年出生, 现任上海交通大学副校长, 博士生导师, 已发表学术论文一百余篇, 目前主要从事人工智能与复杂系统控制的研究.